TMATHS1 **jeudi 1er octobre 2020**

Interrogation écrite n°3 – Sujet A

L'utilisation d'une calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1 (1 point). — On considère quatre points A, B, C et D dans l'espace tels que $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$.

Montrer que les points B, C et D sont alignés.

Exercice 2 (2 points). — Soit ABCD un parallélogramme de l'espace. On considère un point E quelconque de l'espace. On note F le point tel $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$ et G le point tel que $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{AE}$.

1. Faire une figure.

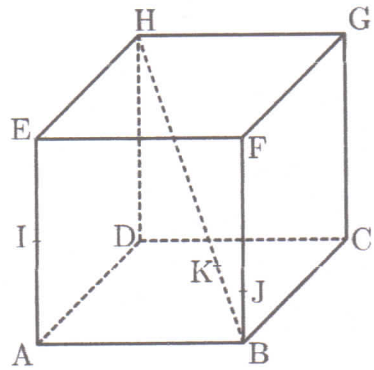
2. Démontrer que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$.

3. En déduire que les points B, D, F et G sont coplanaires.

Exercice 3 (2 points). — Soit ABCDEFGH un cube de l'espace. On note I le milieu de [AE], J le point tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$ et K le point tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BH}$

1. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{JI}$, $\overrightarrow{JC}$ et $\overrightarrow{JK}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BC}$

2. En déduire que les points I, J, K et C sont coplanaires.



Interrogation écrite n°3
CORRECTION

Exercice 1

B, C, D sont alignés si on arrive à exprimer l'un ou l'autre des vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ ou $\overrightarrow{CD}$ en fonction d'un des 2 autres.

ex : $\overrightarrow{BC} = k\,\overrightarrow{BD}$, ou $\overrightarrow{BC} = k\,\overrightarrow{CD}$.

On sait que $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$

Partons de $\overrightarrow{BC}$. On sait par relation de Chasles que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

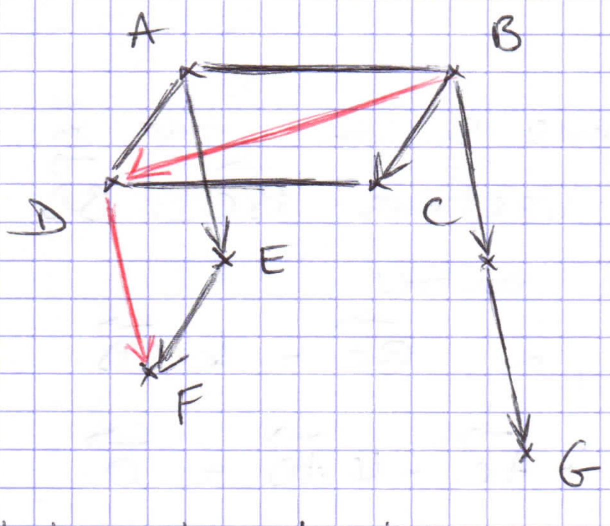
Or, comme
$$3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$$
$$3\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$$

Donc
$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{DA}$$
$$\overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}\left(\underbrace{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}}_{\text{Chasles}}\right)$$
$$\overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{BC} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{CD}$$ cqfd.

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc colinéaires donc B, C et D sont alignés.

Exercice 2

1. Exemple de figure



2. Par relation de Chasles,

$\vec{BF} = \vec{BA} + \vec{AE} + \vec{EF}$

Or, $\vec{BA} = \vec{CD}$ car ABCD parallélogramme

$\vec{EF} = \vec{BC}$

et comme $\vec{BG} = 2\vec{AE} \Rightarrow \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{BG}$

Donc $\vec{BF} = \vec{CD} + \frac{1}{2}\vec{BG} + \vec{BC}$

$\vec{BF} = \underbrace{\vec{BC} + \vec{CD}} + \frac{1}{2}\vec{BG}$

$\vec{BF} = \vec{BD} + \frac{1}{2}\vec{BG}$.

Exercice 3

1. $\vec{Ji} = \vec{JB} + \vec{BA} + \vec{Ai}$

$= -\frac{1}{4}\vec{BF} + \vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AE}$

$= -\frac{1}{4}\vec{BF} + \vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{BF}$

$= \vec{BA} + \frac{1}{4}\vec{BF}$

$$\vec{JC} = \vec{JB} + \vec{BC}$$
$$= -\frac{1}{4}\vec{BF} + \vec{BC}$$

$$\vec{JK} = \vec{JB} + \vec{BK} = -\frac{1}{4}\vec{BF} + \frac{1}{4}\vec{BH}$$
$$= -\frac{1}{4}\vec{BF} + \frac{1}{4}\left(\vec{BF} + \vec{FE} + \vec{EH}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\vec{BF} + \frac{1}{4}\left(\vec{BF} + \vec{BA} + \vec{BC}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\vec{BA} + \frac{1}{4}\vec{BC}.$$

2 - On peut maintenant exprimer chacun des vecteurs $\vec{Ji}$, $\vec{JC}$ et $\vec{JK}$ dans la base orthonormée $(B, \vec{BA}, \vec{BF}, \vec{BC})$.

$$\vec{Ji}\begin{pmatrix}1\\1/4\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{JC}\begin{pmatrix}0\\-1/4\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{JK}\begin{pmatrix}1/4\\0\\1/4\end{pmatrix}$$

Existe-t-il α et β tels que $\vec{Ji} = \alpha\vec{JC} + \beta\vec{JK}$?

$$\vec{Ji} = \alpha\vec{JC} + \beta\vec{JK} \iff \begin{cases} 1 = 0\alpha + \frac{1}{4}\beta \\ \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\alpha + 0\beta \\ 0 = 1\alpha + \frac{1}{4}\beta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = 4 \\ \alpha = -1 \\ \beta = -4\alpha \end{cases} \rightarrow \text{cohérent}$$

Donc α et β existent : $\vec{Ji} = -\vec{JC} + 4\vec{JK}$ donc les points i, J, K, C sont coplanaires.