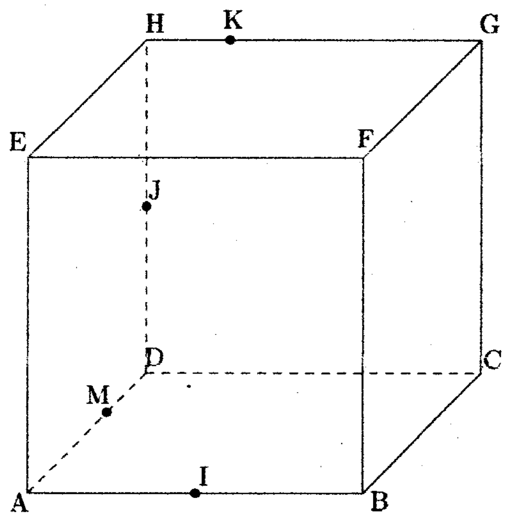
Exercice 2 (5 points) + C

On considère un cube ABCDEFGH.
I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [DH].
K et M sont les points tels que :

$$\overrightarrow{HK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$



- Partie A -

L'objectif de cette exercice est de montrer que le point M appartient au plan (IJK).
On considère le repère de l'espace $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. a. Donner les coordonnées des points I, J, K et M.

b. En déduire celles des vecteurs $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

2. Déterminer les réels α et β tels que $\overrightarrow{IM} = \alpha\overrightarrow{IJ} + \beta\overrightarrow{IK}$. Conclure.

Exercice 3. (4 points)

L'espace est muni d'un repère $\left(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$; $B(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$; $C(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$; $D(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $E(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.
On définit les points I, J et K tels que I est le milieu du segment $[OA]$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$

1. Calculer les coordonnées des points I, J et K.

   Dans la suite, on admet $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$; $J\left(0\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ et $K\left(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{3}{2}\right)$.

2. a) Justifier que les points I, J et K ne sont pas alignés.
   b) Les points A, I, J et K sont-ils coplanaires ? Justifier.
   c) Déterminer deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{IJ} + \beta\overrightarrow{IK}$.
   d) Que peut-on en déduire pour la droite (AC) et le plan (IJK) ?

Exercice 2 ← CORRIGÉ

- PARTIE A -

1. a. Dans le repère de l'espace $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$, on lit aisément les coordonnées des points I, J, K et M :

$$I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right) \quad ; \quad J\left(0\,;1\,;\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad K\left(\frac{1}{4}\,;1\,;1\right) \quad ; \quad M\left(0\,;\frac{2}{3}\,;0\right)$$

b. On en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$:

Le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_M - x_I \\ y_M - y_I \\ z_M - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, de même $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et enfin $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Les valeurs de α et β telles que $\overrightarrow{IM} = \alpha\overrightarrow{IJ} + \beta\overrightarrow{IK}$ vérifient le système d'équations suivant $\begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha + \beta = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}\alpha + \beta = 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha + \beta = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}\alpha + \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\alpha - \left(\frac{2}{3} - \alpha\right) = -2 \\ \beta = \frac{2}{3} - \alpha \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\alpha = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \\ \beta = \frac{2}{3} - \alpha \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{4}{3} \\ \beta = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

En remplaçant α par $\frac{4}{3}$ et β par $\left(-\frac{2}{3}\right)$, on montre que la dernière équation est vérifiée : $\frac{4}{3} + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$.

On en déduit que $\overrightarrow{IM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{IJ} - \frac{2}{3}\overrightarrow{IK}$ et donc que les vecteurs $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires et, par conséquent que le point M appartient au plan (IJK).

CORRECTION EX 3

On définit les points I, J et K tels que I est le milieu du segment $[OA]$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$

1. * I est le milieu du segment $[OA]$ donc,

$$I\left(\frac{x_O+x_A}{2}\ ;\ \frac{y_O+y_A}{2}\ ;\ \frac{z_O+z_A}{2}\right) \iff \boxed{I\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)}$$

* $\overrightarrow{DJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix} x_J \\ y_J \\ z_J - 1\end{pmatrix} \qquad \Bigg| \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1\end{pmatrix} \qquad \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

Comme $\overrightarrow{DJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$, on a $\begin{cases} x_J = 0 \\ y_J = \frac{3}{4} \\ z_J - 1 = -\frac{3}{4}\end{cases} \iff \begin{cases} x_J = 0 \\ y_J = \frac{3}{4} \\ z_J = \frac{1}{4}\end{cases}$

$$\boxed{J\left(0\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right)}$$

* $\overrightarrow{EK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$. En utilisant la même méthode, on trouve $\boxed{K\left(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{3}{2}\right)}$

Dans la suite, on admet $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$; $J\left(0\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ et $K\left(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{3}{2}\right)$.

2. a) $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (les coordonnées ne sont pas proportionnelles). Ainsi, les points I, J et K ne sont pas alignés.

b) Les points A, I, J et K sont coplanaires s'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{IA} = \alpha\overrightarrow{IJ} + \beta\overrightarrow{IK}$.

$\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta \\ 0 = \frac{3}{4}\alpha + \beta \\ 0 = \frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{2}\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{4}\alpha\right) \\ \beta = -\frac{3}{4}\alpha \\ 0 = \frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{2}\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\frac{4}{7} \\ \beta = \frac{3}{7} \\ 0 \neq \frac{1}{4}\times\left(-\frac{4}{7}\right) + \frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{7}\right) \end{cases}$$

Il n'existe pas deux réels α et β tels que $\overrightarrow{IA} = \alpha\overrightarrow{IJ} + \beta\overrightarrow{IK}$.
On en déduit que les points A, I, J et K ne sont pas coplanaires.

c) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

L'écriture $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{IJ} + \beta\overrightarrow{IK}$ devient :

$$\begin{cases} -1 = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta \\ 1 = \frac{3}{4}\alpha + \beta \\ 0 = \frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{2}\beta \end{cases} \iff \begin{cases} -1 = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{6}\alpha\right) \\ 1 = \frac{3}{4}\alpha + \beta \\ \beta = -\frac{1}{6}\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{12}{7} \\ 1 = \frac{3}{4}\times\left(\frac{12}{7}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right) \\ \beta = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

Ainsi, $\overrightarrow{AC} = \frac{12}{7}\overrightarrow{IJ} - \frac{2}{7}\overrightarrow{IK}$.

d) Puisque le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est exprimé en fonction des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires. Pour autant, tous ces points ne sont pas coplanaires puisque l'on sait déjà que les points A, I, J et K ne le sont pas.

Ainsi, on peut dire que la droite (AC) est strictement parallèle au plan (IJK).