EXERCICES VARIATIONS D'UNE FONCTION

Exercice 1 :

Soit $f(x) = (x-3)e^x$ définie sur [-3 ;5]

1) Montre que $f'(x) = (x-2)e^x$
2) En déduire le tableau de variation de f
3) Détermine une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0
4) Montre que l'équation f(x) = 0 admet une unique α solution sur [2 ; 5]
5) Donne un encadrement de α à 0,1 près

Exercice 2 :

Soit $f(x) = (3x-1)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

1) Montre que $f'(x) = (3x+2)e^x$
2) En déduire le tableau de variation de f
3) Détermine une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0
4) Montre que l'équation f(x) = 0 admet une unique α solution sur [0 ; 10]
5) Donne un encadrement de α à 0,01 près

Exercice 3 :

Soit $f(x) = xe^x$ définie sur $\mathbb{R}$

Etudie les variations de f

Exercice 4 :

Retrouve cet exercice corrigé en vidéo sur www.supermaths.fr/conseils-pedagogiques

⇨ Démarre la lecture de la vidéo à 10 min (catégorie 3)

Soit $f(x) = e^x(x^2-3x+1)$ définie sur $\mathbb{R}$

1) Montre que $f'(x) = e^x(x^2-x-2)$
2) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
3) Détermine l'équation de la tangente au point d'abscisse 0

CORRECTION DES EXERCICES
VARIATIONS D'UNE FONCTION

Ex 1

1. $f(x) = (x-3)e^x$

On reconnait le type " $U \times V$ " avec

$$U = x-3 \qquad V = e^x$$

$$U' = 1 \qquad V' = e^x$$

donc $f'(x) = U'V + UV'$

$$= 1\, e^x + (x-3)\, e^x$$

$$= e^x(1 + x - 3)$$

$$= e^x(x-2)$$

2. Signe de $f'(x) = e^x(x-2)$?

On reconnait une forme $A \times B$ avec

$$A = e^x \quad \text{et} \quad B = x-2.$$

Signe de e^x ?

Exponentielle toujours positive donc $e^x > 0$.

Signe de $x-2$?

$x-2$ s'annule en 2, positive si $x > 2$ et négative si $x < 2$.

x	-3		2		5
e^x			$+$		
$x-2$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-6e^{-3}$	↘	$-e^2$	↗	$2e^2$

(Règle des signes)

3. Equation de tangente : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Ici, $a = 0$ donc

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = e^0(0-2)(x-0) + (0-3)e^0$

$y = 1 \times (-2)\ x + (-3) \times 1$

$y = -2x + 3$

4. J'utilise le théorème de la bijection sur $[2;5]$:

Sur cet intervalle, on sait que :

- la fonction f est continue
- la fonction f est strictement croissante
- $f(2) = -e^2$ et $f(5) = 2e^2$

Or, $-e^2 < 0 < 2e^2$ donc $0 \in [f(2); f(5)]$

Je peux donc en déduire que d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2;5]$.

5. Dans le menu TABLE de la calculatrice, en entrant la fonction f sur $[2;5]$, on obtient : $f(3) = 0$

donc $\alpha = 3$.

Ex 2

1. $f(x) = (3x-1)e^x$

On reconnait le type "$u \times v$" avec

$$u = 3x-1 \qquad v = e^x$$
$$u' = 3 \qquad v' = e^x$$

donc $f'(x) = u'v + uv'$
$= 3e^x + (3x-1)e^x$
$= e^x(3+3x-1)$
$= e^x(2+3x)$
$= (3x+2)e^x$.

2. Signe de $f'(x) = (3x+2)e^x$?

On reconnait une forme $A \times B$ avec

$A = 3x+2$ et $B = e^x$

$\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$

$3x+2=0$ $\qquad$ Toujours positif

$3x = -2$

$x = \frac{-2}{3}$

x	$-\infty$		$-2/3$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$	
e^x			$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$-3e^{-2/3}$	$\nearrow$	

(Signe de a à droite)

3. $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = (3\times 0+2)e^0(x-0) + (3\times 0-1)e^0$

$y = 2\times 1\, x - 1\times 1$

$y = 2x - 1$

4. Sur $[0;10]$:

- la fonction f est continue
- f est strictement croissante
- $f(0) = (3\times 0-1)e^0 = -1$

  $f(10) = (3\times 10-1)e^{10} = 29e^{10} \simeq 638768$

  donc $f(0) < 0 < f(10)$

D'après le théorème de la bijection sur cet intervalle, on en déduit que il existe une unique solution α sur $[0;10]$ telle que $f(x) = 0$.

5. Dans le menu TABLE de la calculatrice, en entrant la fonction f sur $[0;10]$, on obtient :

$0 < \alpha < 1$ à 1 près

$0{,}3 < \alpha < 0{,}4$ à 10^{-1} près

$0{,}33 < \alpha < 0{,}34$ à 10^{-2} près

Ex 3

$$f(x) = x e^{x}$$

Dérivons la fonction, qui est du type $u \times v$.

$u = x$ $\quad$ $v = e^{x}$

$u' = 1$ $\quad$ $v' = e^{x}$

Donc $f'(x) = u'v + uv'$

$= 1 \times e^{x} + x \times e^{x}$

$= (1 + x)\, e^{x}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$	
e^{x}			$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	

$\rightarrow$ $1 + x = 0 \iff x = -1$

Ex 4

$$f(x) = e^x(x^2 - 3x + 1)$$

1) f est de type $u \times v$.

$u = e^x \qquad v = x^2 - 3x + 1$

$u' = e^x \qquad v' = 2x - 3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'v + uv' \\ &= e^x(x^2 - 3x + 1) + e^x(2x - 3) \\ &= e^x(x^2 - 3x + 1 + 2x - 3) \\ &= e^x(x^2 - x - 2) \end{aligned}$$

2) • e^x toujours positif.

• $x^2 - x - 2 = 0 \longrightarrow$ second degré

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)$

$= 1 + 8 = 9 > 0$ donc 2 solutions

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 - 3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \qquad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 + 3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2.$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
e^x				$+$			
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$5e^{-1}$	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$	

Signe de a à l'ext. des racines

3)

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = e^0(0^2-0-2)(x-0) + e^0(0^2-3\times 0+1)$$

$$y = 1\times(-2)x + 1\times 1$$

$$y = -2x+1.$$