La fonction exponentielle

Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$ => **fonction exponentielle** $\exp : \mathbb{R} \to]0\,;+\infty[$

$$\exp : x \to \exp(x) = e^{x}$$

La fonction exponentielle est **continue** et **dérivable sur** $\mathbb{R}$

$$(e^{x})' = e^{x} \qquad e^{0} = 1 \qquad e^{1} = e \qquad (e^{u(x)})' = u'\, e^{u(x)}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$ donc e^{x} **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$

Propriétés

$$e^{a}.e^{b} = e^{a+b} \qquad \frac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a-b} \qquad e^{-b} = \frac{1}{e^{b}} \qquad (e^{a})^{n} = e^{n \times a} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Équations - Inéquations

$$e^{x} = e^{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$e^{x} \leq e^{y} \Leftrightarrow x \leq y$$

$$x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^{x} < 1$$

$$x > 0 \Leftrightarrow e^{x} > 1$$

Limites

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1$$

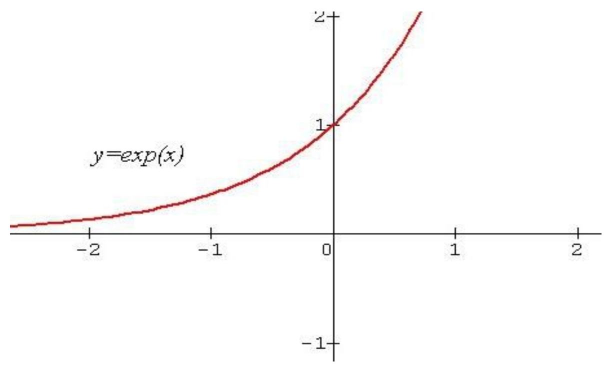
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x e^{x} = 0$$

e^{x} l'emporte sur x en l'infini

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^{x}	0	1	$+\infty$

Courbe de la fonction e^{x}



Méthode : Déterminer la limite de $\lim\limits_{x \to \bullet} e^{u(x)}$

1. $\lim\limits_{x \to \bullet} u(x) = \blacksquare$

2. $\lim\limits_{x \to \blacksquare} e^{x} = \blacktriangle$

3. par composition, $\lim\limits_{x \to \bullet} e^{u(x)} = \blacktriangle$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\\ \blacksquare\\ \blacktriangle\end{array}\right\} \text{ remplacent } \begin{array}{l} a \in \mathbb{R}\\ -\infty\\ +\infty\end{array}$$

A mémoriser :

$e^{-\infty} = 0$

$e^{+\infty} = +\infty$