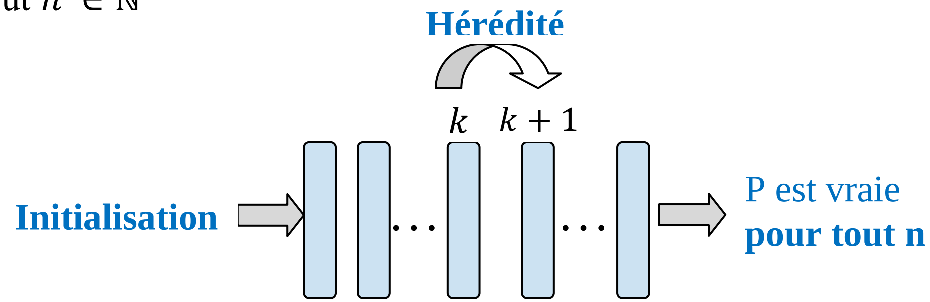
LE PRINCIPE DE LA RECURRENCE

A quoi ça sert ? A démontrer qu'une propriété P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

File de dominos
Le 1er domino tombe ⇨ **initialisation**
Le domino k qui tombe entraîne le domino $k+1$ ⇨**hérédité**



1. **J'écris la propriété P**

2. **Initialisation :**

   Je montre que la propriété P est vraie au rang 0. Je remplace n par 0

3. **Hérédité :**

   Je suppose que la propriété P est vraie au rang k. J'écris la propriété avec k ⇨ hypothèse de récurrence (que j'utilise au début ou dans mes calculs)
   Je démontre que la propriété P est vraie au rang $k+1$. J'écris la propriété avec $k+1$ ⇨ mon arrivée

4. **Conclusion :**

   J'ai démontré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire
   Donc la propriété P est vraie **pour tout n** $\in \mathbb{N}$

LE PRINCIPE DE LA RECURRENCE

Hérédité

Rappels sur les règles de calculs :

Avec les puissances	Avec plusieurs multiplications
$\mathbf{2 \times 2^5 \neq 4^5}$ $\mathbf{2 \times 2^k \neq 4^k}$ $\mathbf{2^5 \times 2^2 = 2^7}$ $\mathbf{2 \times 2^3 = 2^4}$ $\quad$ $\mathbf{2 \times 2^k = 2^{k+1}}$	$\mathbf{5 \times (2 \times 3) \neq 10 \times 15}$ $\mathbf{5 \times (2 \times 3) = 10 \times 3}$ **ou** $\mathbf{2 \times 15}$

Méthode 1 : Reconstruction (lorsque u_{n+1} est définie partir de u_n)

Quelles opérations fais-tu à u_n pour **reconstruire** u_{n+1} ?

Respecter les priorités des opérations

Méthode 2 : lorsque u_n est définie partir d'une fonction

Rappel : $a < b$. Si f est croissante, alors $f(a) < f(b)$.

Si f est décroissante, alors $f(a) > f(b)$.

LE PRINCIPE DE LA RECURRENCE

Extrait Exercice Pondichéry 2016

La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $T_0 = 25$ et pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = 0{,}85 \times T_n + 15$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$.

1. **J'écris la propriété P_n :** $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$
2. **Initialisation :** $100 - 75 \times 0{,}85^0 = 25 = T_0$ donc la propriété est vraie au rang 0

3. **Hérédité :**

   Je suppose que la propriété P est vraie au rang k, c'est-à-dire $T_k = 100 - 75 \times 0{,}85^k$.
   Je démontre que la propriété P est vraie au rang $k+1$, c'est-à-dire $T_{k+1} = 100 - 75 \times 0{,}85^{k+1}$.

Reconstruction de T_{k+1} à partir de T_k en utilisant la formule de l'énoncé $T_{n+1} = 0{,}85 \times T_n + 15$:

$$\begin{aligned}
0{,}85 \times T_k &= 0{,}85 \times (100 - 75 \times 0{,}85^k) \\
0{,}85 \times T_k &= 85 - 75 \times 0{,}85^{k+1} \\
0{,}85 \times T_k + 15 &= 85 - 75 \times 0{,}85^{k+1} + 15 \\
0{,}85 \times T_k + 15 &= 100 - 75 \times 0{,}85^{k+1} \\
T_{k+1} &= 100 - 75 \times 0{,}85^{k+1}
\end{aligned}$$

Donc la propriété P est vraie au rang $k+1$.

4. **Conclusion :**

   J'ai démontré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire
   Donc la propriété P est vraie **pour tout n** $\in \mathbb{N}$