

## Exercices supplémentaires – Second degré

### Partie A : Forme canonique, équations, inéquations, factorisation

#### Exercice 1

Mettre sous forme canonique les trinômes suivants

$$2x^2 + 8x - 2 \quad ; \quad x^2 + 3x + 1 \quad ; \quad -x^2 + 2x + 5 \quad ; \quad 3x^2 + x - 4$$

#### Exercice 2

On considère  $f: x \mapsto x^2 - 5x + 6$  défini sur  $\mathbb{R}$ .

- 1) Mettre  $f(x)$  sous forme canonique.
- 2) En déduire une factorisation de  $f(x)$ .
- 3) Résoudre l'inéquation  $f(x) > 0$ .

#### Exercice 3

On considère  $f: x \mapsto -2x^2 + 6x - 1$  défini sur  $\mathbb{R}$ .

- 1) Mettre  $f(x)$  sous forme canonique.
- 2) En déduire une factorisation de  $f(x)$ .
- 3) Résoudre l'inéquation  $f(x) > 0$ .

#### Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

$$2x^2 - 12x + 18 = 0 \quad ; \quad x^2 - x + 6 = 0 \quad ; \quad 3x^2 + 4x - 1 = 0 \quad ; \quad 2x^2 - x + 1 = 0$$

#### Exercice 5

Déterminer les éventuels points d'intersection des paraboles suivantes avec l'axe des abscisses

$$y = x^2 - 4x + 3 \quad ; \quad y = 3x^2 + 2x + 3 \quad ; \quad y = -x^2 - 9x - 20 \quad ; \quad y = x^2 + 2x$$

#### Exercice 6

Résoudre les équations suivantes :

$$x^2 + 5x + 3 = 2x + 3 \quad ; \quad (2t + 1)(t - 4) = t^2 - 4t - 6 \quad ; \quad (t + 2)^2 = 2t^2 + 5t - 2$$
$$(x + 1)(x + 2) = (x + 3)(x + 4) + (x + 5)(x + 6)$$

#### Exercice 7

Factoriser, si possible, les trinômes suivants, en un produit de deux polynômes de degré 1 :

$$x^2 - 4x - 1 \quad ; \quad x^2 - x - 6 \quad ; \quad 3x^2 + 7x + 2 \quad ; \quad 16x^2 + 24x + 9$$

#### Exercice 8

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$  par

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 4}{x + 1}$$

- 1) Tracer à la calculatrice la courbe de la fonction  $f$ . Que peut-on en dire ?
- 2) Factoriser  $-x^2 + 3x + 4$ .
- 3) En déduire une expression simplifiée de  $f(x)$ . Est-elle valable pour toute valeur de  $x$  ?

#### Exercice 9

Résoudre les inéquations suivantes

$$\frac{1}{2}x^2 + 3x - 8 > 0 \quad ; \quad x^2 + 3x - 5 < x + 4 \quad ; \quad 2(x + 1)^2 - 3x > 2 \quad ; \quad 3x + \frac{1}{2x} \leq \frac{5}{2}$$

#### Exercice 10

Charles affirme avoir trouvé une solution entière à l'équation  $x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{8} = 0$ .

Qu'en pensez-vous ?

#### Exercice 11

- 1) Factoriser les polynômes  $x^2 - x - 6$  et  $2x^2 + 3x - 2$ .
- 2) Résoudre l'équation  $\frac{2}{x^2 - x - 6} + \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} = 0$ .

## **Partie B : Equations à paramètres, changement de variable, identification**

### **Exercice 1**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$ .

- 1) Montrer que 1 est solution de  $g(x) = 0$ .
- 2) Déterminer trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $g(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$  pour tout réel  $x$ .
- 3) En déduire le signe de  $g(x)$ .

### **Exercice 2**

Résoudre les équations bicarrées suivantes en posant  $u = x^2$  :

$$x^4 - 12x^2 + 27 = 0 \quad ; \quad x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

### **Exercice 3**

- 1) Résoudre l'équation  $2x^2 + 5x + 2 = 0$ .
- 2) En utilisant un changement d'inconnue, en déduire les solutions de l'équation

$$\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-1} + 2 = 0$$

- 3) Par une méthode analogue, résoudre l'équation  $x + 5\sqrt{x} - 3 = 0$ .

### **Exercice 4**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 25x + 42$ .

- 1) Développer, ordonner et réduire  $(x + 3)(ax^2 + bx + c)$ .
- 2) Déterminer trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $f(x) = (x + 3)(ax^2 + bx + c)$  pour tout réel  $x$ .
- 3) Résoudre  $f(x) = 0$ .

### **Exercice 5**

On considère le trinôme suivant :  $(m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3)$ .

Pour quelles valeurs de  $m$  ce trinôme a-t-il une racine double ? Calculer alors cette racine.

### **Exercice 6**

On considère le trinôme  $x^2 - (2m + 3)x + m^2$ .

Pour quelles valeurs de  $m$  ce trinôme a-t-il une racine double ? Calculer alors cette racine.

### **Exercice 7**

On considère l'équation  $2x^2 - (m + 2)x + m - 2 = 0$ .

- 1) Calculer  $m$  pour que l'une des solutions soit égale à 3.
- 2) En déduire l'autre solution de l'équation.

### **Exercice 8**

Résoudre les équations suivantes :

$$x + \frac{1}{x} = 3 \quad ; \quad \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} = -1 \quad ; \quad \frac{2x+m}{x} - \frac{2x}{x+m} = 2 \quad \text{où } m \text{ est un réel donné}$$

### **Exercice 9**

- 1) A l'aide de la calculatrice, tracer les courbes représentatives des fonctions  $f: x \mapsto 7 - x$  et  $g: x \mapsto 2\sqrt{x-4}$ .
- 2) Résoudre graphiquement  $f(x) = g(x)$ .
- 3) Résoudre par le calcul l'équation  $f(x) = g(x)$ .

### **Exercice 10**

On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = x^2 - ax + 3$  où  $a$  est un nombre réel.

- 1) Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $h$  admet deux racines distinctes.
- 2) Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $h$  admet une racine double.
- 3) Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $h$  n'admet pas de racine.
- 4) Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles le minimum de  $h$  est strictement inférieur à  $-1$ .

## **Partie C : Déterminer un trinôme sous conditions**

### **Exercice 1**

On considère une parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  qui passe par les points  $A(0; 3)$ ,  $B(1; 5)$  et  $C(2; 15)$ .

- 1) Ecrire un système de trois équations d'inconnues  $a$ ,  $b$  et  $c$  traduisant l'énoncé.
- 2) Résoudre le système.
- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{P}$  avec l'axe des abscisses.

### **Exercice 2**

On considère une parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  qui passe par les points  $A\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ ,  $B(2; -6)$  et  $C\left(3; -\frac{25}{2}\right)$ .

- 1) Ecrire un système de trois équations d'inconnues  $a$ ,  $b$  et  $c$  traduisant l'énoncé.
- 2) Résoudre le système.
- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{P}$  avec l'axe des abscisses.

### **Exercice 3**

On considère un polynôme  $f$  de degré 2 tel que  $f(11) = 181$  et pour tout réel  $x$ ,

$$x^2 - 2x + 2 \leq f(x) \leq 2x^2 - 4x + 3$$

- 1) On pose  $g(x) = x^2 - 2x + 2$  et  $h(x) = 2x^2 - 4x + 3$ . Déterminer les formes canoniques de  $g$  et  $h$ .
- 2) En déduire que pour tout réel  $x$ , on a  $f(x) \geq 1$ .
- 3) Déterminer  $f(1)$
- 4) A l'aide des informations précédentes, déterminer la forme canonique de  $f$  puis sa forme développée.

## **Partie D : Variations, extremum, propriété de la courbe, position relative**

### **Exercice 1**

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elles admettent un minimum ou un maximum et en quelle valeur il est atteint :

$$f: x \mapsto 3x^2 + 4 \quad ; \quad g: x \mapsto -2(x-4)^2 + 8 \quad ; \quad h: x \mapsto -2x^2 + 8x - 1$$

### **Exercice 2**

Dresser, en justifiant, le tableau de variations des fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto x^2 + 4x - 6 \quad ; \quad g: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 5x$$

### **Exercice 3**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-5; 3]$  par  $f(x) = 3x^2 + 6x - 7$ .

- 1) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de  $f$ .
- 2) En déduire le minimum et le maximum de  $f$  sur  $[-5; 3]$ .
- 3) Résoudre :
  - a.  $f(x) = -10$
  - b.  $f(x) = 17$
  - c.  $f(x) < 17$
  - d.  $f(x) > -20$

### **Exercice 4**

On note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{7}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 - 3x$$

- 1) Résoudre l'inéquation  $f(x) > g(x)$
- 2) Que peut-on en déduire pour les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ?

### **Exercice 5**

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5}{x^2 + x + 1}$$

- 1) Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) < 5$  et  $f(x) > -6$ .

### Exercice 6

Pour un nombre réel  $x$ , le seul nombre dont le cube est égal à  $x$  s'appelle la racine cubique de  $x$  et se note  $\sqrt[3]{x}$ .  
Par exemple  $\sqrt[3]{1000} = 10$  car  $10^3 = 1000$ .

On définit  $t = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ .

- 1) Montrer que  $t^3 + 3t - 4 = 0$ .
- 2) Montrer qu'il existe trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $(t - 1)(at^2 + bt + c) = t^3 + 3t - 4$  pour tout réel  $t$ .
- 3) En déduire que  $t$  est un nombre entier.

## Correction exercices supplémentaires – Second degré

### Partie A : Forme canonique, équations, inéquations, factorisation

#### Exercice 1

Pour tout réel  $x$ ,

$$2x^2 + 8x - 2 = 2(x^2 + 4x - 1) = 2[(x + 2)^2 - 4 - 1] = \boxed{2(x + 2)^2 - 10}$$

$$\text{car } x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \text{ donc } x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$$

Pour tout réel  $x$ ,

$$x^2 + 3x + 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1 = \boxed{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$$

$$\text{car } x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$$

Pour tout réel  $x$ ,

$$-x^2 + 2x + 5 = -(x^2 - 2x - 5) = -[(x - 1)^2 - 1 - 5] = \boxed{-(x - 1)^2 + 6}$$

$$\text{car } x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Pour tout réel  $x$ ,

$$3x^2 + x - 4 = 3\left(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right) = 3\left[\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} - \frac{4}{3}\right] = \boxed{3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{49}{12}}$$

$$\text{Car } x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = \left(x + \frac{1}{6}\right)^2$$

#### Exercice 2

1) Pour tout réel  $x$  :

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = \boxed{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}$$

2) Pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = \boxed{(x - 3)(x - 2)}$$

3)

| $x$              | $-\infty$ | 2 | 3 | $+\infty$ |
|------------------|-----------|---|---|-----------|
| Signe de $x - 3$ | —         | — | 0 | +         |
| Signe de $x - 2$ | —         | 0 | + | +         |
| Signe de $f(x)$  | +         | 0 | — | +         |

Les solutions de  $f(x) > 0$  sont donc  $\boxed{]-\infty; 2[ \cup ]3; +\infty[}$

#### Exercice 3

1) Pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = -2x^2 + 6x - 1 = -2\left(x^2 - 3x + \frac{1}{2}\right) = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\right] = \boxed{-2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}}$$

2) Pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}\right] = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right] = \boxed{-2\left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\right)}$$

3)

| $x$                                             | $-\infty$ | $\frac{3 - \sqrt{7}}{2}$ | $\frac{3 + \sqrt{7}}{2}$ | $+\infty$ |
|-------------------------------------------------|-----------|--------------------------|--------------------------|-----------|
| Signe de $x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}$ | —         | —                        | 0                        | +         |
| Signe de $x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}$ | —         | 0                        | +                        | +         |
| Signe de $f(x)$                                 | +         | 0                        | —                        | +         |

Les solutions de  $f(x) > 0$  sont donc  $\boxed{\left]-\infty; \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right[ \cup \left]\frac{3+\sqrt{7}}{2}; +\infty\right[}$

#### Exercice 4

Pour  $2x^2 - 12x + 18 : \Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 0$  donc le trinôme a une unique racine  $x_0 = \frac{12}{4} = 3$ .

D'où  $\boxed{S = \{3\}}$

Pour  $x^2 - x + 6 : \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 6 = -23 < 0$  donc le trinôme n'a pas de racines :  $\boxed{S = \emptyset}$

Pour  $3x^2 + 4x - 1 : \Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 + 12 = 28 > 0$  donc le trinôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{28}}{6} = \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-2 - \sqrt{7}}{3}$$

$$\boxed{S = \left\{ \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}; \frac{-2 - \sqrt{7}}{3} \right\}}$$

Pour  $2x^2 - x + 1 : \Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0$  donc le trinôme n'a pas de racines :  $\boxed{S = \emptyset}$

#### Exercice 5

Pour déterminer les points d'intersection d'une parabole d'équation  $y = f(x)$  avec l'axe des abscisses, on commence par résoudre  $f(x) = 0$ .

Pour  $y = x^2 - 4x + 3 : \Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 = 4$  donc le trinôme a deux racines :  $x_1 = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3$  et  $x_2 = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1$ .

La parabole d'équation  $y = x^2 - 4x + 3$  coupe donc deux fois l'axe des abscisses : au point  $A(1; 0)$  et  $B(3; 0)$ .

Pour  $y = 3x^2 + 2x + 3 : \Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 3 = -32 < 0$  donc le trinôme n'a pas de racines et la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

Pour  $y = -x^2 - 9x - 20 : \Delta = (-9)^2 - 4 \times (-1) \times (-20) = 81 - 80 = 1$  donc le trinôme a deux racines  $x_1 = \frac{9+1}{-2} = -5$  et  $x_2 = \frac{9-1}{-2} = -4$  donc la parabole d'équation  $y = -x^2 - 9x - 20$  coupe deux fois l'axe des abscisses : en  $A(-5; 0)$  et  $B(-4; 0)$ .

Pour  $y = x^2 + 2x : \Delta = 2^2 - 4 \times 0 = 4$  donc le trinôme a deux racines  $x_1 = \frac{-2+\sqrt{4}}{2} = 0$  et  $x_2 = \frac{-2-\sqrt{4}}{2} = -2$ .

La parabole d'équation  $y = x^2 + 2x$  coupe donc l'axe des abscisses en deux points :  $O(0; 0)$  et  $A(-2; 0)$ .

#### Exercice 6

Pour tout réel  $x$  :

$$x^2 + 5x + 3 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3$$

Donc  $\boxed{S = \{0; 3\}}$

Pour tout réel  $t$  :

$$(2t + 1)(t - 4) = t^2 - 4t - 6 \Leftrightarrow 2t^2 - 8t + t - 4 = t^2 - 4t - 6 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1$  donc il y a deux racines :  $t_1 = \frac{3+1}{2} = 2$  et  $t_2 = \frac{3-1}{2} = 1$ . D'où  $\boxed{S = \{1; 2\}}$

Pour tout réel  $t$  :

$$(t + 2)^2 = 2t^2 + 5t - 2 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 4 = 2t^2 + 5t - 2 \Leftrightarrow -t^2 - t + 6 = 0$$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25$  donc il y a deux racines :  $t_1 = \frac{1+5}{-2} = -3$  et  $t_2 = \frac{1-5}{-2} = 2$ . D'où  $\boxed{S = \{-3; 2\}}$

Pour tout réel  $x$ ,

$$(x + 1)(x + 2) = (x + 3)(x + 4) + (x + 5)(x + 6) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x^2 + 7x + 12 + x^2 + 11x + 30 \\ \Leftrightarrow x^2 + 15x + 40 = 0$$

$\Delta = 15^2 - 4 \times 40 = 65$  donc il y a deux racines  $x_1 = \frac{-15+\sqrt{65}}{2}$  et  $x_2 = \frac{-15-\sqrt{65}}{2}$ .  $\boxed{S = \left\{ \frac{-15+\sqrt{65}}{2}; \frac{-15-\sqrt{65}}{2} \right\}}$

### Exercice 7

Pour  $x^2 - 4x - 1$  :  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) = 20$  donc il y a deux racines :  $x_1 = \frac{4+\sqrt{20}}{2} = \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}$  et  $x_2 = 2 - \sqrt{5}$ . D'où  $x^2 - 4x - 1 = \boxed{(x - 2 - \sqrt{5})(x - 2 + \sqrt{5})}$

Pour  $x^2 - x - 6$  :  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) = 25$  donc il y a deux racines  $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$  et  $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$ . D'où  $x^2 - x - 6 = \boxed{(x - 3)(x + 2)}$

Pour  $3x^2 + 7x + 2$  :  $\Delta = 7^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25$  donc il y a deux racines  $x_1 = \frac{-7+5}{6} = -\frac{1}{3}$  et  $x_2 = \frac{-7-5}{6} = -2$ . D'où  $3x^2 + 7x + 2 = \boxed{3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x + 2)}$

Pour  $16x^2 + 24x + 9$  :  $\Delta = 24^2 - 4 \times 16 \times 9 = 0$  donc il y a une racine double  $x_0 = \frac{-24}{32} = -\frac{3}{4}$  d'où  $16x^2 + 24x + 9 = \boxed{16\left(x + \frac{3}{4}\right)^2}$

### Exercice 8

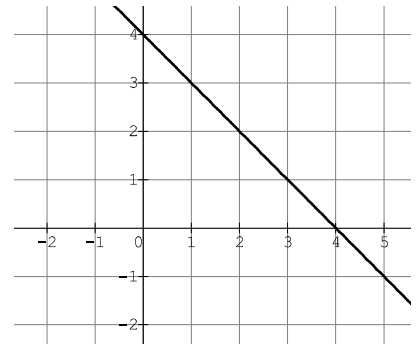
1) Il semble que la courbe de la fonction  $f$  soit une droite.

2)  $-x^2 + 3x + 4$  :  $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 25$  donc le trinôme a deux racines  $x_1 = \frac{-3+5}{-2} = -1$  et  $x_2 = \frac{-3-5}{-2} = 4$ . D'où  $-x^2 + 3x + 4 = \boxed{-(x + 1)(x - 4)}$

3) Pour  $x \neq -1$  :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 4}{x + 1} = \frac{-(x + 1)(x - 4)}{x + 1} = -(x - 4) = \boxed{-x + 4}$$

Cette expression est valable pour tout  $x$  différent de  $-1$ .



### Exercice 9

Pour  $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 8 > 0$  :  $\Delta = 3^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-8) = 25$  donc le trinôme est du signe de  $a = \frac{1}{2}$  sauf entre les racines  $x_1 = \frac{-3+5}{1} = 2$  et  $x_2 = \frac{-3-5}{1} = -8$ . D'où  $S = ]-\infty; -8[ \cup ]2; +\infty[$

Pour  $x^2 + 3x - 5 < x + 4$  : pour tout réel  $x$

$$x^2 + 3x - 5 < x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 9 < 0 :$$

Signe de  $x^2 + 2x - 9$  :  $\Delta = 2^2 - 4 \times (-9) = 40$  donc  $x^2 + 2x - 9$  est du signe de  $a = 1$  sauf entre les racines

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{40}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{10}}{2} = -1 + \sqrt{10} \text{ et } x_2 = -1 - \sqrt{10}. \text{ D'où } S = ]-1 - \sqrt{10}; -1 + \sqrt{10}[$$

Pour  $2(x + 1)^2 - 3x > 2$  : pour tout réel  $x$ ,

$$2(x + 1)^2 - 3x > 2 \Leftrightarrow 2(x^2 + 2x + 1) - 3x - 2 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x(2x + 1) > 0$$

Donc  $2x^2 + x$  a deux racines 0 et  $-\frac{1}{2}$  et est du signe de  $a = 2$  sauf entre les racines. On obtient donc

$$S = ]-\infty; -\frac{1}{2}[ \cup ]0; +\infty[$$

Pour  $3x + \frac{1}{2x} \leq \frac{5}{2}$  : pour tout réel  $x$  non nul

$$3x + \frac{1}{2x} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{6x^2 + 1}{2x} \leq \frac{5x}{2} \Leftrightarrow \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x} \leq 0$$

Signe de  $6x^2 - 5x + 1$  :  $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 = 1$  donc  $6x^2 - 5x + 1$  est du signe de  $a = 6$  sauf entre les racines

$x_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2}$  et  $x_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{1}{3}$ . On construit ensuite le tableau de signes :

| $x$                        | $-\infty$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |   |
|----------------------------|-----------|---|---------------|---------------|-----------|---|
| $6x^2 - 5x + 1$            | +         | + | 0             | -             | 0         | + |
| $2x$                       | -         | 0 | +             | +             | +         | + |
| $\frac{6x^2 - 5x + 1}{2x}$ | -         | + | 0             | -             | 0         | + |

D'où  $S = ]-\infty; 0[ \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$

### Exercice 10

La méthode de résolution classique n'aboutit pas car on obtient un discriminant dont il n'est pas facile d'avoir une racine carrée. On va donc considérer que  $x$  est un entier et raisonner par identification :

On suppose que  $x$  est un entier. Alors  $x^2$  est également un entier.

$$x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{8} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x) = (x - 2)\sqrt{2}$$

Le membre de gauche est un entier donc cela doit également être le cas pour le membre de droite. Or la seule possibilité est que  $x - 2 = 0$  (sinon, on aurait un nombre de la forme  $k\sqrt{2}$  avec  $k$  un entier non nul...) et alors  $x = 2$ . Le membre de gauche est alors :  $x^2 - 2x = 2^2 - 2 \times 2 = 0$ . Les deux membres sont bien égaux.

L'équation a donc bien une solution entière qui est 2.

### Exercice 11

1) Pour  $x^2 - x - 6 : \Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) = 25$  donc il y a deux racines  $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$  et  $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$  donc  $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$

Pour  $2x^2 + 3x - 2 : \Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$  donc il y a deux racines  $x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$  et  $x_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$  donc  $2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2) = (2x - 1)(x + 2)$

2) Pour  $x \in \mathbb{R} - \left\{3; -2; \frac{1}{2}\right\}$  :

$$\frac{2}{x^2 - x - 6} + \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x - 3)(x + 2)} + \frac{x}{(2x - 1)(x + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2x - 1) + x(x - 3)}{(x - 3)(2x - 1)(x + 2)} = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 + x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

Pour  $x^2 + x - 2 : \Delta = 1^2 - 4 \times (-2) = 9$  donc il y a deux racines  $x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$  et  $x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$ .

En tenant compte de l'ensemble de définition, on obtient  $S = \{1\}$

## Partie B : Equations à paramètres, changement de variable, identification

### Exercice 1

1)  $g(1) = 1 + 5 - 12 + 6 = 0$  donc 1 est bien solution de  $g(x) = 0$ .

2) Pour tout réel  $x$ ,  
 $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$

Par identification avec  $g(x)$ , on obtient : 
$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 5 \\ c - b = -12 \\ -c = 6 \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \\ c = -6 \end{cases}$$

D'où  $g(x) = (x - 1)(x^2 + 6x - 6)$

3) Signe de  $x^2 + 6x - 6 : \Delta = 6^2 - 4 \times (-6) = 60$  donc  $x^2 + 6x - 6$  est du signe de  $a = 1$  sauf entre les racines  $x_1 = \frac{-6+\sqrt{60}}{2} = \frac{-6+2\sqrt{15}}{2} = -3 + \sqrt{15}$  et  $x_2 = -3 - \sqrt{15}$ .

| $x$            | $-\infty$ | $-3 - \sqrt{15}$ | $-3 + \sqrt{15}$ | 1 | $+\infty$ |
|----------------|-----------|------------------|------------------|---|-----------|
| $x - 1$        | -         | -                | -                | 0 | +         |
| $x^2 + 6x - 6$ | +         | 0                | -                | 0 | +         |
| $g(x)$         | -         | 0                | +                | 0 | +         |

### Exercice 2

Pour  $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$  : on pose  $u = x^2$  donc  $u^2 = x^4$  et alors on a  $u^2 - 12u + 27 = 0$ .

$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 27 = 36$  donc il y a deux racines  $u_1 = \frac{12+6}{2} = 9$  et  $u_2 = \frac{12-6}{2} = 3$ .

On a donc  $x^2 = 9$  ou  $x^2 = 3$  ce qui donne  $x = 3$  ou  $x = -3$  ou  $x = \sqrt{3}$  ou  $x = -\sqrt{3}$ .

Finalement  $S = \{3; -3; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$

Pour  $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$  : on pose  $u = x^2$  et alors  $u^2 + 3u - 4 = 0$ .

$\Delta = 3^2 - 4 \times (-4) = 25$  donc il y a deux racines  $u_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$  et  $u_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$ .

On a donc  $x^2 = 1$  ou  $x^2 = -4$  ce qui est impossible. Finalement  $S = \{-1; 1\}$

### Exercice 3

1)  $2x^2 + 5x + 2 : \Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9$  donc il y a deux racines  $x_1 = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2}$  et  $x_2 = \frac{-5-3}{4} = -2$ .

D'où  $S = \left\{-\frac{1}{2}; -2\right\}$

2) On résout dans  $\mathbb{R} - \{1\}$  : on pose  $u = \frac{1}{x-1}$  d'où

$$\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-1} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2u^2 + 5u + 2 = 0 \Leftrightarrow u = -\frac{1}{2} \text{ ou } u = -2 \text{ d'après la question 1}$$

Or :

$$u = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-1 = -2 \Leftrightarrow x = -1$$

$$u = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = -2 \Leftrightarrow x-1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Finalement,  $S = \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$

3) On résout dans  $[0; +\infty[$  et on pose  $u = \sqrt{x}$  d'où  $u^2 = x$ .

$$x + 5\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 5u - 3 = 0$$

Pour  $u^2 + 5u - 3 : \Delta = 5^2 - 4 \times (-3) = 37$  donc il y a deux racines  $u_1 = \frac{-5+\sqrt{37}}{2}$  et  $u_2 = \frac{-5-\sqrt{37}}{2}$ .

On obtient donc  $\sqrt{x} = \frac{-5+\sqrt{37}}{2}$  ou  $\sqrt{x} = \frac{-5-\sqrt{37}}{2}$ . Cette dernière équation n'a pas de solution car  $\frac{-5-\sqrt{37}}{2} < 0$ . D'où

$$\sqrt{x} = \frac{-5+\sqrt{37}}{2} \Leftrightarrow x = \left(\frac{-5+\sqrt{37}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{25 - 10\sqrt{37} + 37}{4} = \frac{31 - 5\sqrt{37}}{2}$$

Finalement  $S = \left\{\frac{31-5\sqrt{37}}{2}\right\}$

### Exercice 4

1) Pour tout réel  $x$ ,

$$(x+3)(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 3bx + 3c = \boxed{ax^3 + (b+3a)x^2 + (c+3b)x + 3c}$$

2) Par identification entre l'expression précédente et  $f(x)$ , on obtient  $\begin{cases} a = 3 \\ b + 3a = -4 \\ c + 3b = -25 \\ 3c = 42 \end{cases}$  ce qui donne  $\begin{cases} a = 3 \\ b = -13 \\ c = 14 \end{cases}$

D'où  $f(x) = (x+3)(3x^2 - 13x + 14)$

3) Pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0 \text{ ou } 3x^2 - 13x + 14 = 0$$

Pour  $3x^2 - 13x + 14 = 0 : \Delta = (-13)^2 - 4 \times 3 \times 14 = 1$  donc il y a deux racines  $x_1 = \frac{13+1}{6} = \frac{7}{3}$  et  $x_2 = \frac{13-1}{6} = 2$

On a donc  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$  ou  $x = \frac{7}{3}$  ou  $x = 2$

D'où  $S = \left\{-3; 2; \frac{7}{3}\right\}$

### Exercice 5

Pour  $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3) :$

$$\Delta = (2(3m+1))^2 - 4(m+3) \times (m+3) = 4(9m^2 + 6m + 1) - 4(m^2 + 6m + 9) = 32m^2 - 32$$

Le trinôme a une racine double quand son discriminant est nul or

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 32m^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = 1 \text{ ou } m = -1$$

On a donc deux valeurs de  $m$  possible pour que le trinôme ait une racine double : 1 et -1.

Pour  $m = 1$ , le trinôme est  $4x^2 + 8x + 4$ . La racine double est  $x_0 = -\frac{8}{8} = -1$

Pour  $m = -1$ , le trinôme est  $2x^2 - 4x + 2$ . La racine double est  $x_0 = -\frac{-4}{4} = 1$ .

### Exercice 6

On considère le trinôme  $x^2 - (2m + 3)x + m^2$ .

Pour quelles valeurs de  $m$  ce trinôme a-t-il une racine double ? Calculer alors cette racine.

### Exercice 7

1) 3 est solution de  $2x^2 - (m + 2)x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \times 3^2 - (m + 2) \times 3 + m - 2 = 0$   
 $\Leftrightarrow 18 - 3m - 6 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 5$

On doit donc avoir  $\boxed{m = 5}$  pour que 3 soit solution de l'équation.

2) Pour  $m = 5$ , l'équation est  $2x^2 - 7x + 3 = 0$ .  $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25$  donc il y a bien deux racines  
 $x_1 = \frac{7+5}{4} = 3$  et  $x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$ .

L'autre solution à l'équation est donc  $\boxed{\frac{1}{2}}$

### Exercice 8

Pour  $x \neq 0$  :

$$x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

Pour  $x^2 - 3x + 1$  :  $\Delta = (-3)^2 - 4 = 5$  donc il y a deux racines  $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  et  $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

On a donc  $\boxed{S = \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right\}}$

Pour  $x \in \mathbb{R} - \{1; 2\}$

$$\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} = -1 \Leftrightarrow 4(x-2) - 3(x-1) = -(x-1)(x-2) \Leftrightarrow 4x - 8 - 3x + 3 = -(x^2 - 2x - x + 2)$$
$$\Leftrightarrow x - 5 = -x^2 + 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

Pour  $x^2 - 2x - 3$  :  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-3) = 16$  donc il y a deux racines  $x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$  et  $x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$

Finalement  $\boxed{S = \{-1; 3\}}$

Pour  $x \in \mathbb{R} - \{0; -m\}$  avec  $m$  un réel quelconque

$$\frac{2x+m}{x} - \frac{2x}{x+m} = 2 \Leftrightarrow (2x+m)(x+m) - 2x^2 = 2x(x+m)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2mx + mx + m^2 - 2x^2 = 2x^2 + 2mx \Leftrightarrow -2x^2 + mx + m^2 = 0$$

Pour  $-2x^2 + mx + m^2$  :  $\Delta = m^2 - 4 \times (-2) \times m^2 = 9m^2$ .

On a donc trois cas :

Soit  $m = 0$  et alors  $\Delta = 0$  et il y a une racine double  $x_0 = 0$  qui est une valeur interdite...

Soit  $m > 0$ ,  $\sqrt{\Delta} = 3m$  et alors il y a deux racines distinctes :  $x_1 = \frac{-m+3m}{-4} = -\frac{m}{2}$  et  $x_2 = \frac{-m-3m}{-4} = m$

Ces deux solutions ne sont pas valeurs interdites car  $m \neq 0$ .

Soit  $m < 0$ ,  $\sqrt{\Delta} = -3m$  et alors il y a deux racines distinctes :  $x_1 = \frac{-m+3(-m)}{-4} = m$  et  $x_2 = \frac{-m-3(-m)}{-4} = -\frac{m}{2}$

Finalement, soit  $m = 0$  et alors  $\boxed{S = \emptyset}$ , soit  $m \neq 0$  et alors  $\boxed{S = \left\{ m; -\frac{m}{2} \right\}}$

### Exercice 9

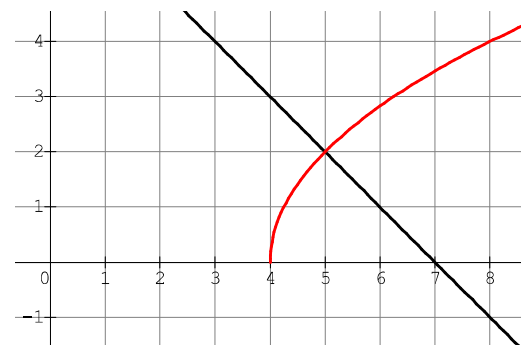
- 1) En noir : courbe de  $f$  ; en rouge : courbe de  $g$ .  
2) Graphiquement l'équation a une unique solution 5. Cela correspond à l'abscisse du point d'intersection entre les deux courbes.

3) On résout dans  $[4; +\infty[$  car  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  mais  $g$  n'est définie que sur  $[4; +\infty[$ .

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 7 - x = 2\sqrt{x-4} \Leftrightarrow (7-x)^2 = 4(x-4) \text{ et } 7-x > 0$$
$$\Leftrightarrow 49 - 14x + x^2 = 4x - 16 \text{ et } x < 7 \Leftrightarrow x^2 - 18x + 65 = 0 \text{ et } x < 7$$

Pour  $x^2 - 18x + 65$  :  $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 65 = 64$  donc il y a deux racines  
 $x_1 = \frac{18+8}{2} = 13$  et  $x_2 = \frac{18-8}{2} = 5$

Comme on doit aussi avoir  $x < 7$ , la seule solution possible est bien 5.



### Exercice 10

1)  $h(x) = x^2 - ax + 3 : \Delta = a^2 - 4 \times 3 = a^2 - 12$

$h$  a deux racines distinctes si et seulement si son discriminant est strictement positif donc  $a^2 - 12 > 0$ . Or

$$a^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow a^2 > 12 \Leftrightarrow a > \sqrt{12} \text{ ou } a < -\sqrt{12} \Leftrightarrow a > 2\sqrt{3} \text{ ou } a < -2\sqrt{3}$$

$h$  a deux racines distinctes pour  $a \in ]-\infty; -2\sqrt{3}[ \cup ]2\sqrt{3}; +\infty[$

2)  $h$  est une racine double si et seulement si son discriminant est nul donc  $a^2 = 12$ , autrement dit pour

$$a = \{2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\}$$

3)  $h$  n'a pas de racines si et seulement si son discriminant est strictement négatif donc  $a^2 - 12 < 0$  ou encore  $a^2 < 12$ . On a donc  $a \in ]-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}[$

4) Le minimum de  $h$  est strictement inférieur à  $-1$  si et seulement si l'inéquation  $h(x) < -1$  a au moins une solutions. Or

$$h(x) < -1 \Leftrightarrow x^2 - ax + 4 < 0$$

Cette inéquation a au moins une solution si le discriminant de  $x^2 - ax + 4$  est positif ou nul. En effet,  $x^2 - ax + 4$  est du signe de 1 sauf entre les racines, si elles existent.

Or  $\Delta = a^2 - 16$  donc on doit résoudre  $a^2 - 16 \geq 0$  ce qui donne  $a \in ]-\infty; -4[ \cup ]4; +\infty[$

### Partie C : Déterminer un trinôme sous conditions

#### Exercice 1

1)  $A \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 3 = a \times 0^2 + b \times 0 + c \Leftrightarrow c = 3$

$$B \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 5 = a + b + c$$

$$C \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 15 = 4a + 2b + c$$

Les points  $A, B$  et  $C$  appartiennent à  $\mathcal{P}$  si et seulement si 
$$\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 15 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + b = 2 \\ 4a + 2b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 2 - a \\ 4a + 2(2 - a) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 2 - a \\ 2a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -2 \\ a = 4 \end{cases}$$

3) La parabole  $\mathcal{P}$  a pour équation  $y = 4x^2 - 2x + 3$ .

Pour déterminer l'intersection de  $\mathcal{P}$  avec l'axe des abscisses, on cherche les points de  $\mathcal{P}$  d'ordonnée 0 donc on résout  $4x^2 - 2x + 3 = 0$ .

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 \times 3 = -44 < 0$  donc l'équation n'a pas de solution et la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

#### Exercice 2

1)  $A \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = a + b + c$

$$B \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -6 = 4a + 2b + c$$

$$C \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -\frac{25}{2} = 9a + 3b + c$$

Les points  $A, B$  et  $C$  appartiennent à  $\mathcal{P}$  si et seulement si 
$$\begin{cases} a + b + c = -\frac{3}{2} \\ 4a + 2b + c = -6 \\ 9a + 3b + c = -\frac{25}{2} \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} a + b + c = -\frac{3}{2} \\ 4a + 2b + c = -6 \\ 9a + 3b + c = -\frac{25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{3}{2} - a - b \\ 4a + 2b - \frac{3}{2} - a - b = -6 \\ 9a + 3b - \frac{3}{2} - a - b = -\frac{25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{3}{2} - a - b \\ b = -\frac{9}{2} - 3a \\ 8a + 2\left(-\frac{9}{2} - 3a\right) = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{3}{2} - a - b \\ b = -\frac{9}{2} - 3a \\ 2a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -\frac{3}{2} \\ a = -1 \end{cases}$$

3) L'équation de la parabole est  $y = -x^2 - \frac{3}{2}x + 1$ . Pour déterminer les points d'intersection de cette parabole avec l'axe des abscisses, on résout  $-x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0$ .

$$\Delta = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \times (-1) = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4} \text{ donc l'équation a deux solutions } x_1 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}{-2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{\frac{3}{2} - \frac{5}{2}}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Finalement la parabole  $\mathcal{P}$  coupe deux fois l'axe des abscisses : en  $D(-2; 0)$  et  $E\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

### Exercice 3

- 1) Pour tout réel  $x$  :  $g(x) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 - 1 + 2 = \boxed{(x - 1)^2 + 1}$   
 $h(x) = 2x^2 - 4x + 3 = 2\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) = 2\left[(x - 1)^2 - 1 + \frac{3}{2}\right] = \boxed{2(x - 1)^2 + 1}$
- 2) Pour tout réel  $x$ ,  $(x - 1)^2 \geq 0$  car un carré est toujours positif donc  $(x - 1)^2 + 1 \geq 1$  ce qui signifie que  $g(x) \geq 1$ . Or  $f(x) \geq g(x)$  ce qui signifie que  $\boxed{f(x) \geq 1}$
- 3) Pour  $x = 1$ , on a  $g(1) \leq f(1) \leq h(1)$  or  $g(1) = 1$  et  $h(1) = 1$  donc  $\boxed{f(1) = 1}$
- 4) D'après les questions précédentes, 1 est le minimum de  $f$  car  $f$  est toujours supérieur à 1 et 1 est atteint en 1. La forme canonique de  $f$  est donc  $f(x) = a(x - 1)^2 + 1$ .  
 De plus  $f(11) = 181$  or  $a(11 - 1)^2 + 1 = 181 \Leftrightarrow 100a = 180 \Leftrightarrow a = 1,8$ .  
 On trouve donc  $\boxed{f(x) = 1,8(x - 1)^2 + 1}$   
 En développant, on obtient  $\boxed{f(x) = 1,8x^2 - 3,6x + 2,8}$

### Partie D : Variations, extremum, propriété de la courbe, position relative

#### Exercice 1

$f: x \mapsto 3x^2 + 4$  :  $f$  est de la forme  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  avec  $a = 3 > 0$  donc  $f$  est décroissante puis croissante et a donc un minimum. Il est atteint en 0 car  $-\frac{b}{2a} = 0$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $g(x) = -2(x^2 - 8x + 16) + 8 = -2x^2 + 16x - 24$   
 $g$  est de la forme  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  avec  $a = -2 < 0$  donc  $g$  est croissante puis décroissante et admet donc un maximum. Il est atteint en 4 car  $-\frac{b}{2a} = -\frac{16}{-4} = 4$ .

$h$  est de la forme  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  avec  $a = -2 < 0$  donc  $h$  admet un maximum. Il est atteint en 2 car  $-\frac{b}{2a} = -\frac{8}{-4} = 2$ .

#### Exercice 2

$f$  est de la forme  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  avec  $a = 1 > 0$  donc  $f$  est décroissante puis croissante et admet donc un minimum. Il est atteint en  $-2$  car  $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$ . De plus  $f(-2) = (-2)^2 + 4 \times (-2) - 6 = -10$ .

| $x$               | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|------|-----------|
| Variations de $f$ |           |      |           |

$g$  est de la forme  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  avec  $a = -\frac{1}{2} < 0$  donc  $g$  est croissante puis décroissante et admet donc un maximum. Il est atteint en 5 car  $-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{-1} = 5$ . De plus  $g(5) = -\frac{25}{2} + 25 = \frac{25}{2}$ .

| $x$               | $-\infty$ | 5 | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|---|-----------|
| Variations de $g$ |           |   |           |

### Exercice 3

1)  $f$  est de la forme  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  avec  $a = 3 > 0$  donc  $f$  est décroissante puis croissante. Elle admet donc un minimum qui est atteint en  $-1$  car  $-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{6} = -1$ . De plus  $f(-1) = 3 - 6 - 7 = -10$ . Mais aussi  $f(-5) = 3 \times 25 - 30 - 7 = 38$  et  $f(3) = 3 \times 9 + 18 - 7 = 38$ .

|                   |    |     |    |
|-------------------|----|-----|----|
| $x$               | -5 | -1  | 3  |
| Variations de $f$ | 38 | -10 | 38 |

2) Le minimum de  $f$  sur  $[-5; 3]$  est donc  $-10$  et le maximum est  $38$ .

3)

a.  $f(x) = -10 \Leftrightarrow x = -1$  car  $-10$  est le minimum de  $f$  et il n'est atteint qu'en  $-1$ .  $S = \{-1\}$

b.  $f(x) = 17 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 7 = 17 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

Pour  $x^2 + 2x - 8 : \Delta = 2^2 - 4 \times (-8) = 36$  donc il y a deux racines  $x_1 = \frac{-2+6}{2} = 2$  et  $x_2 = \frac{-2-6}{2} = -4$ .

D'où  $S = \{-4; 2\}$

c.  $f(x) < 17 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 < 0$  or  $x^2 + 2x - 8$  est du signe de 1 sauf entre les racines  $-4$  et  $2$  donc

$S = ]-4; 2[$

d. Comme le minimum de  $f$  est  $-10$  et que  $-10 > -20$ , on a  $f(x) > -20$  pour tout  $x \in [-5; 3]$  donc

$S = [-5; 3]$

### Exercice 4

1) Pour  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 + 5x + \frac{7}{2} > -x^2 - 3x \Leftrightarrow 2x^2 + 8x + \frac{7}{2} > 0$$

Pour  $2x^2 + 8x + \frac{7}{2} : \Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times \frac{7}{2} = 36$  donc  $2x^2 + 8x + \frac{7}{2}$  est du signe de 2 sauf entre les racines

$$x_1 = \frac{-8+6}{4} = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-8-6}{4} = -\frac{7}{2} \text{ donc } S = ]-\infty; -\frac{7}{2}[ \cup ]-\frac{1}{2}; +\infty[$$

2) Sur  $]-\infty; -\frac{7}{2}[ \cup ]-\frac{1}{2}; +\infty[$ ,  $f(x) > g(x)$  donc  $\mathcal{C}_f$  est au dessus de  $\mathcal{C}_g$ .

Sur  $[-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}]$ ,  $\mathcal{C}_f$  est donc en dessous de  $\mathcal{C}_g$ .

### Exercice 5

1)  $f$  est une fonction rationnelle. Elle est définie lorsque son dénominateur est non nul.

Pour  $x^2 + x + 1 : \Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$  donc  $x^2 + x + 1$  n'a pas de racines et est donc toujours non nul.  $f$  est donc bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

2) Pour  $x \in \mathbb{R} :$

$$f(x) < 5 \Leftrightarrow \frac{4x^2-5}{x^2+x+1} < 5 \Leftrightarrow 4x^2 - 5 < 5(x^2 + x + 1) \text{ car } x^2 + x + 1 \text{ est toujours du signe de } a = 1 \text{ donc positif} \\ \Leftrightarrow -x^2 - 5x - 10 < 0$$

Pour  $-x^2 - 5x - 10 : \Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = -15 < 0$  donc  $-x^2 - 5x - 10$  est toujours du signe de  $a = -1$  donc négatif. L'inégalité précédente est donc toujours vraie, tout comme  $f(x) < 5$

De même :  $f(x) > -6 \Leftrightarrow 4x^2 - 5 > -6(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow 10x^2 + 6x + 1 > 0$

Pour  $10x^2 + 6x + 1 : \Delta = 6^2 - 4 \times 10 = -4 < 0$  donc  $10x^2 + 6x + 1$  est toujours du signe de  $a = 10$  donc positif. L'inégalité précédente est donc toujours vraie tout comme  $f(x) > -6$

### Exercice 6

1) Commençons par calculer  $t^2$  puis  $t^3 :$

$$t^2 = \left( \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} \right)^2 = \left( \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} \right)^2 - 2\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} \times \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} + \left( \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} \right)^2$$

$$t^3 = t^2 \times t = \left[ \left( \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} \right)^2 - 2\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} \times \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} + \left( \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} \right)^2 \right] \left( \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} \right)$$

$$= (\sqrt{5} + 2) - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)^2(\sqrt{5} - 2)} + 3\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)^2} - (\sqrt{5} - 2)$$

$$\begin{aligned}
&= 4 - 3\sqrt[3]{(5 + 4\sqrt{5} + 4)(\sqrt{5} - 2)} + 3\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)(5 - 4\sqrt{5} + 4)} \\
&= 4 - 3\sqrt[3]{9\sqrt{5} - 18 + 20 - 8\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{9\sqrt{5} - 20 + 18 - 8\sqrt{5}} \\
&= 4 - 3\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}
\end{aligned}$$

Donc, on a bien  $t^3 + 3t - 4 = 4 - 3\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} + 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}\right) - 4 = 0$

2) Pour tout réel  $t$ ,

$$(t - 1)(at^2 + bt + c) = at^3 + bt^2 + ct - at^2 - bt - c = at^3 + (b - a)t^2 - (c - b)t - c$$

Par identification avec  $t^3 + 3t - 4$ , on obtient 
$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 3 \\ -c = -4 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$$

Donc  $\boxed{(t - 1)(t^2 + t + 4) = t^3 + 3t - 4}$

3)  $t^3 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 4) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ ou } t^2 + t + 4 = 0$

Pour  $t^2 + t + 4 : \Delta = 1^2 - 4 \times 4 = -15$  donc il n'y a pas de racines.

Finalement, la seule solution de  $t^3 + 3t - 4 = 0$  est 1 donc  $\boxed{\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 1}$