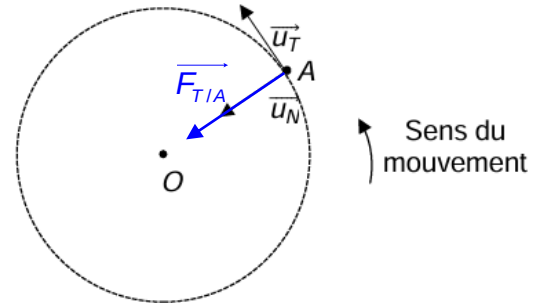


Mesure de la masse de la Terre à l'aide d'un satellite

Q1. Reproduire la figure 1 sur votre copie et représenter sans souci d'échelle, la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}_{T/A}$ exercée par la Terre sur le satellite.

Q2. Donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\vec{F}_{T/A}$ en fonction du vecteur unitaire $\vec{u}_N$, de G , M_T , m et r .

$$\vec{F}_{T/A} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_N$$



Q3. En appliquant la deuxième loi de Newton au centre de masse A du satellite, établir que sa vitesse a pour expression $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$.

Système : satellite Référentiel géocentrique

Inventaire des forces : le satellite n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle de la Terre.

Deuxième loi de Newton : $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_{T/A} = m \cdot \vec{a}$

$$m \cdot \vec{a} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_N$$

$$\vec{a} = G \cdot \frac{M_T}{r^2} \cdot \vec{u}_N$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire et uniforme, l'accélération est également définie par

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_N$$

$$\text{Ainsi } \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_N = G \cdot \frac{M_T}{r^2} \cdot \vec{u}_N$$

$$\text{Donc } v^2 = G \cdot \frac{M_T}{r} \text{ et finalement on retrouve } v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Q4. À l'aide de l'expression littérale de la vitesse v du satellite et de la définition de la période de révolution T du satellite autour de la Terre, vérifier que l'expression de la

troisième loi de Kepler est : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$.

Pendant une période de révolution T , le satellite parcourt l'orbite circulaire de périmètre $2\pi r$ à la vitesse v .

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G M_T}{r}$$

$$4\pi^2 r^2 \cdot r = T^2 \cdot G \cdot M_T$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$$

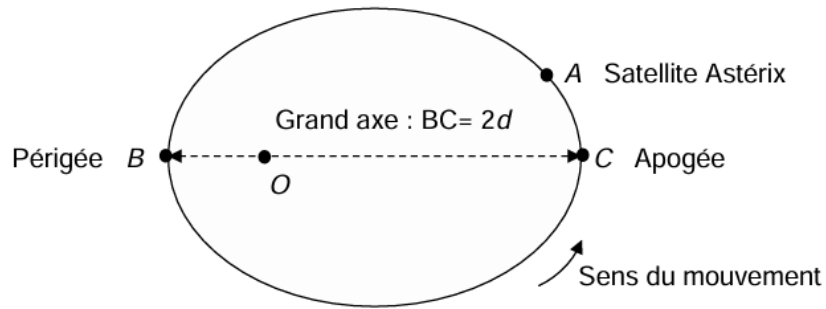


Figure 2. Trajectoire elliptique du satellite Astérix.

Données :

- Grand axe : $BC = 2d$;
- Distance entre le périgée et le centre de la Terre : $D_{OB} = 6,89 \times 10^6 \text{ m}$;
- Distance entre l'apogée et le centre de la Terre : $D_{OC} = 8,07 \times 10^6 \text{ m}$;
- Constante de gravitationnelle universelle : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

Q5. En vous aidant de la figure 2 et des données, calculer la valeur du demi-grand axe d de l'ellipse de la trajectoire du satellite Astérix.

$$BC = 2d = D_{OB} + D_{OC}$$

$$d = \frac{D_{OB} + D_{OC}}{2}$$

$$d = \frac{6,89 \times 10^6 + 8,07 \times 10^6}{2} = 7,48 \times 10^6 \text{ m}$$

Le satellite Astérix effectue 1400 révolutions autour de la Terre en une durée Δt d'une valeur égale à $9,03 \times 10^6 \text{ s}$.

Q6. En exploitant l'expression de la période T de révolution d'un satellite en orbite elliptique, calculer la masse M_T de la Terre.

$$\frac{T^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$$

$$\text{donc } M_T = \frac{4\pi^2 \cdot d^3}{G \cdot T^2}$$

$$\text{Avec } T = \frac{\Delta t}{n}, \text{ on a alors } M_T = \frac{4\pi^2 \cdot d^3}{G \cdot \left(\frac{\Delta t}{n}\right)^2}$$

$$M_T = \frac{4\pi^2 \times (7,48 \times 10^6)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times \left(\frac{9,03 \times 10^6}{1400}\right)^2} = 5,95 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$\frac{4\pi^2 \times 7,48E6^3}{6,67E-11 \times \left(\frac{9,03E6}{1400}\right)^2} = 5,954143086E24$
--